

Soluzione

Esercizio 1 (punti 4)

Dire per quali k reali la matrice è invertibile e calcolare l'inversa per $k=0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3-k & -3 \\ -k & -2k & 3 \end{pmatrix}$

SOLUZIONE

La matrice è invertibile per $k \neq 1$; per $k = 0$ la matrice inversa risulta: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Esercizio 2 (punti 3)

Studiare il carattere della seguente serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!}$

SOLUZIONE

Il carattere della serie a termini positivi risulta convergente: $\sum_k \frac{k+1}{k!}$ con il criterio del rapporto:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+2}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+2}{(k+1)^2} = 0$$

Esercizio 3 (punti 6)

Calcolare massimo e minimo vincolati della seguente funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ con vincolo $g(x) = x + y - 1$

SOLUZIONE

La funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ con vincolo lineare $x + y - 1 = 0$ ha un minimo vincolato in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$

Esercizio 4 (punti 3)

Calcolare il seguente integrale $\int_1^2 \left(\frac{-2x-5}{x^2+5x} \right) dx$

SOLUZIONE

Il calcolo dell'integrale immediato risulta $\int_1^2 \frac{-2x-5}{x^2+5x} dx = -\lg(x^2+5x) \Big|_1^2 = -\lg 14 + \lg 6 = \lg \frac{6}{14}$

Esercizio 5 (punti 6)

Trovare le soluzioni, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, del seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ ky + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si tratta di sistema lineare omogeneo, rango $p = \begin{cases} 2 & k = 0 \text{ oppure } 1 \\ 3 & k \neq 0 \text{ e } 1 \end{cases}$, per $k \neq 0 \text{ e } 1$ esiste solo soluzione banale $(x \ y \ z) = (0 \ 0 \ 0)$, per $k = 0$ esistono ∞^1 soluzioni $(x = \alpha; y = 0; z = 0)$; per $k = 1$ esistono ∞^1 soluzioni $(x = 0; y = -\alpha; z = \alpha)$.

Esercizio 6 (punti 6)

Studiare dominio, continuità e asintoti della seguente funzione $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+2)^2}$

SOLUZIONE

Data la funzione $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+2)^2}$: dominio: $x \neq -2$, As. Vert. $x = -2$, Asintoto orizzontale di equazione $y=2$; la funzione attraversa As. Orizz. In $x = -\frac{7}{10}$, nel suo dominio risulta continua

Esercizio 7 (punti 4) (esercizi Preliminari al compito)

7.1 Scrivere equazione della retta passante per il punto $(-1,3)$ e parallela alla retta di equazione $2x - 3y - 4 = 0$

7.2 Delle seguenti relazioni, indicare quelle errate:

$$\text{a) } x^y z^y = (xz)^{2y}; \text{ b) } x^{\frac{m+1}{m}} = x^m \sqrt{x}; \text{ c) } \lg(-3) = -\lg 3; \text{ d) } \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & d.1 \\ \pm x & d.2 \\ |x| & d.3 \end{cases}$$

SOLUZIONE

$$7.1 \quad y = \frac{2}{3}(x+1) + 3$$

7.2 Sono errati a), c) d1), d2)